第 15 講　導関数の応用

PART1　関数の増減

例題

次の関数の増減を調べよ。

(1)　$f(x)=x^3-12x$

(2)　$f(x)=-x^3+3x^2+9x-15$

Point Pickup

練習

次の関数の増減を調べよ。

(1)　$f(x)=-x^3+6x^2$

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$

第15講　PART1 確認問題

次の関数の増減を調べよ。

1 $f(x)=x^3+3x^2$

関数 $f(x)$ は ア 。

① $x \leqq -2$，$0 \leqq x$ で増加し，$-2 \leqq x \leqq 0$ で減少する

② $-2 \leqq x \leqq 0$ で増加し，$x \leqq -2$，$0 \leqq x$ で減少する

③ $x \leqq -3$，$0 \leqq x$で増加し，$-3 \leqq x \leqq 0$で減少する

④ $-3 \leqq x \leqq 0$で増加し，$x \leqq -3$，$0 \leqq x$で減少する

2 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x+4$

関数 $f(x)$ は イ 。

① $x \leqq -1$，$3 \leqq x$ で増加し，$-1 \leqq x \leqq 3$ で減少する

② $-1 \leqq x \leqq 3$ で増加し，$x \leqq -1$，$3 \leqq x$ で減少する

③ $x \leqq -3$，$1 \leqq x$ で増加し，$-3 \leqq x \leqq 1$ で減少する

④ $-3 \leqq x \leqq 1$ で増加し，$x \leqq -3$，$1 \leqq x$ で減少する

第 15 講　導関数の応用

PART1　関数の増減

例題

次の関数の増減を調べよ。

(1)　$f(x)=x^3-12x$　　(2)　$f(x)=-x^3+3x^2+9x-15$

(1)　$f(x)=x^3-12x$ より　$f'(x)=3x^2-12=3\left(x^2-4\right)=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2,\ 2$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16	↘	-16	↗

したがって，$f(x)$ は $x\leqq -2$，$2\leqq x$ で増加し，$-2\leqq x\leqq 2$ で減少する。

(2)　$f(x)=-x^3+3x^2+9x-15$ より

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3\left(x^2-2x-3\right)=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-20	↗	12	↘

したがって，$f(x)$ は $-1\leqq x\leqq 3$ で増加し，$x\leqq -1$，$3\leqq x$ で減少する。

練習

次の関数の増減を調べよ。

(1)　$f(x)=-x^3+6x^2$　　(2)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$

(1)　$f(x)=-x^3+6x^2$ より　$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 4$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	32	↘

したがって，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 4$ で増加し，$x\leqq 0$，$4\leqq x$ で減少する。

(2)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+3$ より　$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{25}{6}$	↘	$-\frac{1}{3}$	↗

したがって，$f(x)$ は $x\leqq -1$，$2\leqq x$ で増加し，$-1\leqq x\leqq 2$ で減少する。

第15講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

$f(x)=x^3+3x^2$ より

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

$f'(x)=0$ とすると

$$x=-2,\ 0$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

[A]

したがって，$f(x)$ は **$x\leqq-2$，$0\leqq x$ で増加し，$-2\leqq x\leqq 0$ で減少する。**

[A]　関数 $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号
ある区間で常に
$f'(x)>0$
$\Longrightarrow$ $f(x)$ はその区間で増加する。
$f'(x)<0$
$\Longrightarrow$ $f(x)$ はその区間で減少する。
$f'(x)=0$
$\Longrightarrow$ $f(x)$ はその区間で定数である。

2

[正解] イ：④

[解説]

$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x+4$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=-x^2-2x+3\\&=-\left(x^2+2x-3\right)\\&=-(x+3)(x-1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると

$$x=-3,\ 1$$

よって，$f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-5	↗	$\dfrac{17}{3}$	↘

[B]

したがって，$f(x)$ は **$-3\leqq x\leqq 1$ で増加し，$x\leqq-3$，$1\leqq x$ で減少する。**

[B]　関数 $f(x)$ の増減と $f'(x)$ の符号
ある区間で常に
$f'(x)>0$
$\Longrightarrow$ $f(x)$ はその区間で増加する。
$f'(x)<0$
$\Longrightarrow$ $f(x)$ はその区間で減少する。
$f'(x)=0$
$\Longrightarrow$ $f(x)$ はその区間で定数である。